Explorations

PRINTEMPS DES SCIENCES

21-27 Mars 2022

PROTOCOLE DE CONSTRUCTION

d’une fusée à eau

Fusées à eau

Kot astro & M.A.R.S Uclouvain

October 2021

Introduction

Bonjour et bienvenue dans ce petit document qui devrait vous éclairer sur l'activité de lancement de fusées à eau organisée en mars 2022 !

L'objectif est de lancer votre propre fusée dans le but d'atteindre une cible. La fusée sera propulsée grâce à l'éjection d'eau mise sous pression au préalable. L'équipe, dont la fusée arrivera le plus proche de la cible, gagnera le concours !

Dans un premier temps, il vous sera demandé de construire votre fusée avant l'évènement. A cet effet, nous avons réalisé une courte vidéo explicative, reprenant le matériel dont vous aurez besoin ainsi que les différentes étapes de conception.

En parallèle, il vous sera demandé d'effectuer quelques petits calculs permettant à la fusée d'atteindre sa cible en suivant une trajectoire bien définie.
De plus amples informations seront fournies plus tard dans le document, mais gardez bien en tête les informations suivantes.

Vous seront fournies :

1. La pression d'air à mettre dans la bouteille ;
2. La hauteur de la cible ;
3. La distance horizontale entre le lanceur et la cible ;
4. La masse d'eau à mettre dans la bouteille.

L'unique donnée que vous devez trouver (voir sections suivantes) :

1. L'angle à donner à la fusée sur le lanceur.

Le jour du concours, lorsque vous connaîtrez la hauteur de la cible ainsi que la distance horizontale, vous pourrez calculer l'angle α.

Remarque importante : il faut uniquement construire la *fusée*, le lanceur vous sera fourni !
Le lanceur est composé d'une structure dans laquelle la fusée sera positionnée pour le lancement, ainsi que du système permettant de mettre l'eau sous pression.

Annexes Pour ceux et celles qui veulent aller un peu plus loin dans la physique et les mathématiques de ce problème, deux annexes sont jointes à ce document. Elles ne sont donc pas indispensables pour réussir le défi !

1 Construction de la Fusée

Montage

— Bouteille de *Coca* en plastique de 50 cL (pour s'adapter proprement au lanceur, la marque de la bouteille est à respecter)
— Carton (pour fabriquer les ailerons)
— Du carton souple (pour construire un nez conique)
— Du lest pour l'avant de la fusée (matériel au choix)
— De la colle pour fixer les ailerons et le nez
— Du matériel pour décorer la fusée (facultatif)

Montage Il suffit de coller les ailerons en balsa sur la bouteille, de lester l'avant, de former le nez conique en carton et le fixer et enfin de "pimper" un peu la fusée.
Nous organiserons un concours de la plus belle fusée.
Pour de plus amples informations, veuillez visionner la vidéo réalisée à cet effet.

2 Modèle Physique du lancement

2.1 Introduction : principe de fonctionnement d'une fusée

Tout d'abord, introduisons le principe général de fonctionnement d'une fusée.
Celui-ci est très simple et est basé sur la *troisième loi de Newton* : l'action d'une force d'un corps A sur un corps B engendre une **force de réaction** du corps B sur le corps A, d'**intensité égale**, de **même direction** et de **sens opposé** :

$$F_{A\to B} = -F_{B\to A} \tag{1}$$

On peut représenter la fusée comme le corps A, et les gaz éjectés comme le corps B.
Introduisons les quantités physiques :

1. La poussée T mesurée en $[N]$;
2. Le débit massique de gaz $\dot{m}_{\text{gaz}}$ mesuré en $[kg/s]$;
3. La vitesse d'éjection des gaz v_{gaz} mesurée en $[m/s]$.

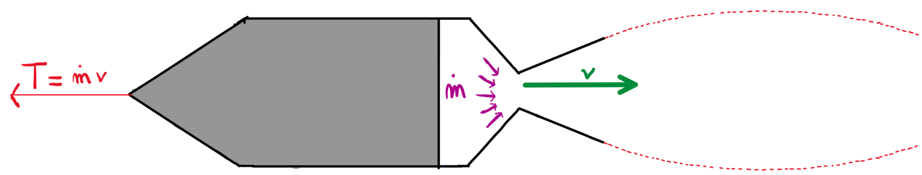

FIGURE 1 – Illustration de la production de poussée dans un moteur fusée

La fusée éjecte les gaz chauds à grande vitesse en exerçant une force sur ceux-ci. Par la troisième loi de Newton, les gaz exercent donc une force sur la fusée dans le sens opposé : la **poussée**.

Plus le débit massique de gaz est élevé, et plus la vitesse de ces gaz est grande, plus la poussée est importante :

$$T = \dot{m}_{\text{gaz}} v_{\text{gaz}} \tag{2}$$

2.2 Comment procéder

Dans le cadre des fusées à eau, étant donné qu'il est difficile de déterminer le débit massique de l'eau, on fonctionne en trois étapes :

1. On détermine la vitesse de l'eau en sortie de bouteille sur base de la pression initiale d'air dans la bouteille ;
2. On détermine la vitesse finale de la fusée grâce à la conservation de la quantité de mouvement.
3. On détermine la trajectoire de la bouteille grâce au tir parabolique

2.3 Principe de Bernoulli

Le but ici est de trouver la vitesse de l'eau lorsqu'elle sort de la bouteille. Pour ce faire on va considérer deux états de l'eau.

1. L'eau est au repos dans la bouteille, sa vitesse est donc nulle. La pression statique est égale à la pression qu'on a injecté dans la bouteille.
2. L'eau est éjectée de la bouteille à une certaine vitesse v_2 inconnue. Elle est à pression atmosphérique.

Soit $v_{\{1,2\}}$ $[m/s]$ la **vitesse** de l'eau, $\rho = 1000$ $[kg/m^3]$ sa densité (masse volumique) et $p_{\{1,2\}}$ sa pression statique.

L'**équation de Bernoulli**, énonce ceci :

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} \tag{3}$$

Ayant $v_1 = 0$ et $p_2 = 0$ $[bar]$, on isole v_2 dans (3) et on obtient :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot p_1}{\rho}} \tag{4}$$

Pourquoi p_2 vaut 0 et pas la pression atmosphérique ? Car la pression p_1 est mesurée en plus de la pression atmosphérique, on peut donc tout calculer sans considérer la pression atmosphérique !

2.4 Conservation de la quantité de mouvement

Ici, nous allons expliquer la relation entre la vitesse de l'eau qui sort de la bouteille et la vitesse de la bouteille. On écrit la conservation de la quantité de mouvement pour le système bouteille-eau, avec $v_{b,\{1,2\}}$ et m_b la vitesse et la masse de la bouteille, respectivement et m_e la masse d'eau :

$$m_e v_1 + m_b v_{b,1} = m_e v_2 + m_b v_{b,2} \tag{5}$$

En se simplifiant la vie en ne considérant pas les signes de vitesse, on obtient :

$$v_{b,2} = v = \frac{m_e v_2}{m_b} = \frac{m_e}{m_b}\sqrt{\frac{2p_1}{\rho}} \tag{6}$$

A la fin de ce document, vous trouverez dans l'annexe A un lien entre ce raisonnement et la poussée d'une fusée.

2.5 Tir parabolique

Soit α l'angle formé par la vitesse initiale avec l'horizon.
Les composantes horizontales et verticales sont $v \cos \alpha$ et $v \sin \alpha$ respectivement, notées v_x et v_y.
Dans le cas qui vous concerne, la fusée est lancée au niveau du sol. On a donc $h_0 = 0$!

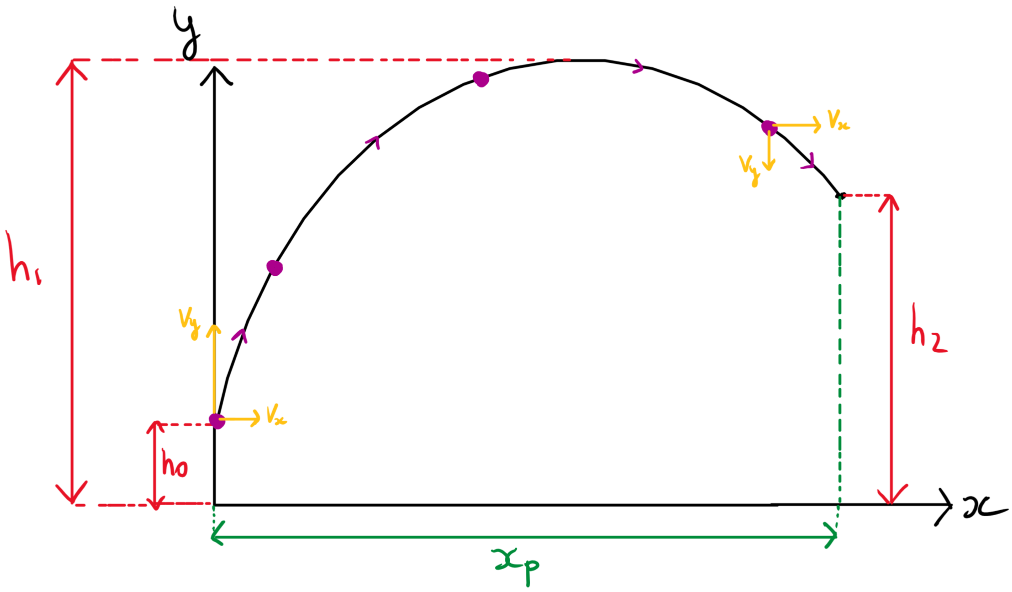

FIGURE 2 – Illustration du tir parabolique et des données principales

Nous considérerons que la fusée est uniquement soumise à la force de pesanteur. Les équations de mouvements sont donc un mouvement rectiligne uniforme (MRU) en x et un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) en y. Elles sont énoncées ci-dessous :

$$\begin{cases} x(t) = v_{x0} \cdot t & = v \cdot cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) = v_{y0} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} & = v \cdot sin(\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \end{cases} \tag{7}$$

Lorsqu'on isole t dans la première équation :

$$t = \frac{x}{v \cdot cos(\alpha)} \tag{8}$$

Et qu'on l'injecte dans la deuxième :

$$y(x) = tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{\Big(v \cdot cos(\alpha)\Big)^2} \tag{9}$$

On trouve l'équation de la parabole qui décrit le tir parabolique que nous étudions. Avec cette équation, si nous connaissons la position x et y de la cible, il devrait etre possible de calculer l'angle de tir α et ... le tour est joué !
Malheureusement, isoler α dans cette équation n'est pas si simple, il faut donc recourir à des méthodes alternatives pour résoudre cette équation, que nous verrons dans la section suivante.

3 Résolution

Il existe plusieurs façons d'approximer la solution exacte de cette équation. La méthode proposée ici se fera à l'aide de l'outil GeoGebra, mais sachez que d'autres méthodes existent, dont une méthode numérique présentée dans l'annexe B.

Pour ce faire, il faudra vous rendre sur le site de Geogebra et ouvrir le fichier fusee.ggb qu'on vous transmet.
Vous tomberez alors sur l'interface suivante :

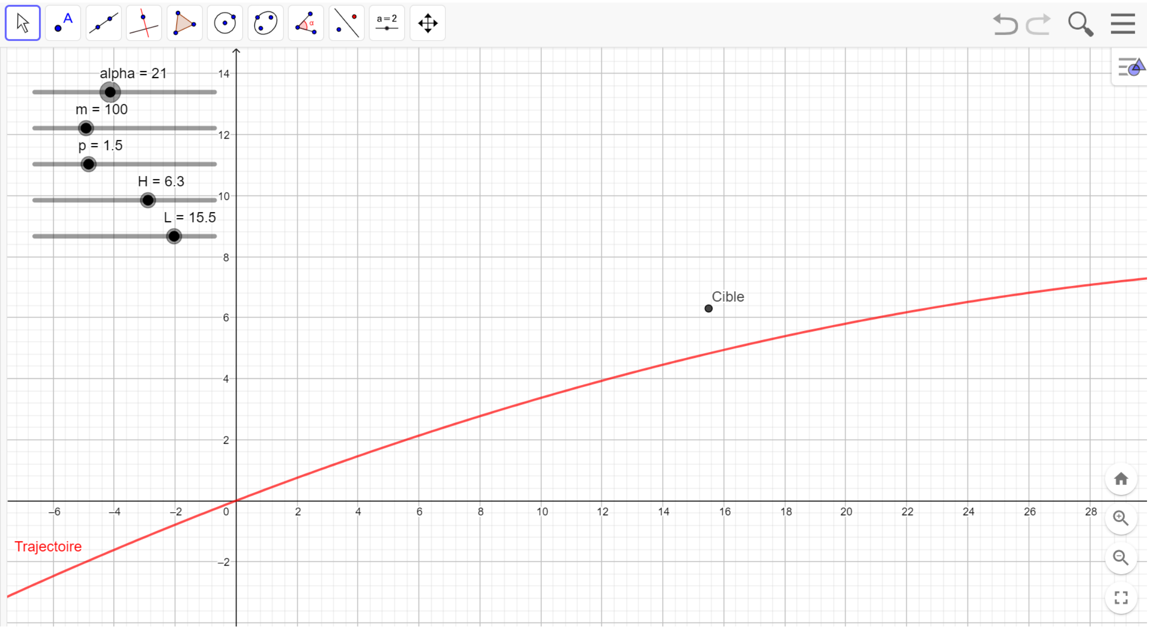

FIGURE 3 – Interface Geogebra

Les glissières sur la gauche régissent les variables que vous pouvez ajuster pour faire intersecter la trajectoire avec la cible.
Les différentes variables sont :

- *alpha*, c'est l'angle entre l'horizontale et la trajectoire initiale de la fusée, en degrés
- m, la masse d'eau à mettre dans la bouteille, en grammes
- p, la pression d'air à injecter dans la bouteille, en bar
- H et L, les positions relatives de la cible par rapport au lanceur, respectivement la distance horizontale et verticale, en mètres

Afin de vous familiariser et gagner en intuition sur le fonctionnement général du système, il vous est conseillé de jouer avec les paramètres à souhait.

Le jour du concours, les distances H et L vous seront données, ainsi que les masses d'eau et la pression à mettre dans la bouteille, il vous suffira alors d'ajuster l'angle alpha pour faire coïncider la trajectoire avec la cible et le tour est joué !

A Annexe : Lien avec la poussée d'une fusée

En supposant une poussée constante T sur un intervalle de temps Δt (ce qui est une approximation grossière mais permettant de fixer un ordre de grandeur), on a :

$$T = m_b a_b = m_b \frac{\Delta v_b}{\Delta t} = m_b \frac{v_{b,2}}{\Delta t} \tag{10}$$

En utilisant (6), on obtient

$$T = \frac{m_e v_2}{\Delta t} \tag{11}$$

En supposant le débit massique d'eau constant, on a $\frac{m_e}{\Delta t} = \dot{m}_{eau}$, et donc on retrouve bien l'expression pour la poussée de l'équation (2) !

$$T = \dot{m}_{eau} v \tag{12}$$

B Annexe : résolution de l'équation de la portée de manière implicite

Dans cette annexe, nous proposons de résoudre le problème sans outil graphique. Cette annexe n'est pas utile à proprement parler pour le problème qui vous occupe, mais elle vise à vous présenter comment on peut résoudre des équations compliquées de façon simple et itérative.

B.1 Expression de la portée

Dans un premier temps, on exprime la portée de la fusée en fonction des paramètres. On se place ici dans le cas général avec une hauteur h_0 non-nulle.

B.1.1 Phase de montée

Le temps mis pour atteindre l'apogée est :

$$t_1 = \frac{v_y}{g} \tag{13}$$

L'apogée a une hauteur h_1 :

$$h_1 = h_0 + v_y t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = h_0 + \frac{v_y^2}{2g} \tag{14}$$

B.1.2 Phase de descente

On trouve le temps de chute libre jusqu'à l'impact au sol :

$$h_1 - h_2 = \frac{g t_2^2}{2} \Longrightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2\left(h_1 - h_2\right)}{g}} = \frac{1}{g}\sqrt{2\left(h_1 - h_2\right) g} \tag{15}$$

Le temps total est donc donné par :

$$t_p = t_1 + t_2 = \frac{1}{g}\left[v_y + \sqrt{2g\left(h_0 - h_2\right) + v_y^2}\right] \tag{16}$$

B.1.3 Portée

La portée x_p est donc "simplement" :

$$x_p = v_x t_p = \frac{v \cos\alpha}{g}\left[v \sin\alpha + \sqrt{2g\left(h_0 - h_2\right) + \left(v \sin\alpha\right)^2}\right] \tag{17}$$

En se rappelant que la vitesse initiale v est trouvée à l'aide de l'équation (6).

La section suivante présente comment on peut trouver l'angle α permettant d'atteindre une portée donnée x_p.

B.2 Les méthodes itératives

Il est compliqué d'isoler α dans cette équation non-linéaire !
Nous allons chercher une **solution approchée** à l'aide d'une **méthode itérative**.

Qu'est-ce qu'une méthode itérative ? Il s'agit d'un algorithme (une séquence de calculs) qui fournit, à chaque itération, une approximation de la solution. Le but, c'est qu'à chaque itération la solution approchée se rapproche de la vraie solution (solution *analytique*) !

B.3 Méthode du point fixe

Cette méthode consiste à isoler l'inconnue dans l'équation, et de l'égaler à une expression impliquant cette même inconnue : l'équation est **implicite** :

$$x = f_{\text{compliquée}}(x) \Longrightarrow x_{i+1} = f_{\text{compliquée}}(x_i), \quad i = 0, 1, 2, ... \tag{18}$$

La marche à suivre est la suivante :
- Choisir une valeur initiale x_0.
- Calculer la valeur x_1 au moyen de l'équation (18).
- Répéter cette opération avec $x_2, x_3, ...$ jusqu'à la convergence.

La convergence de telles équations est difficile à prévoir, et dépend fortement de la valeur initiale x_0 choisie.
Dans le cas de l'équation (17), on isole le premier α apparaissant dans le cosinus :

$$\alpha_{i+1} = \arccos \frac{g x_p}{v \left[v \sin\alpha_i + \sqrt{2g\,(h_0 - h_2) + (v \sin\alpha_i)^2} \right]} \tag{19}$$

Il est plus que conseillé de choisir un angle $0° < \alpha_0 < 90°$, ce qui est logique d'un point de vue physique.

B.4 Exemple

Appliquons la méthode décrite ci-dessus. Avec $h_0 = 1$ $[m]$, $v = 15$ $[m/s]$ et $h_2 = 2$ $[m]$, on cherche α pour atteindre une portée de $x_p = 10$ $[m]$. On choisit un angle initial $\alpha_0 = 30°$. En appliquant l'équation (19) successivement, on obtient :

Itération	Valeur [°]
α_0	30
α_1	61.146
α_2	75.143
α_3	76.640
α_4	76.734
α_5	76.739
α_6	76.739

On remarque que α a convergé (avec une certaine précision) vers une valeur $\alpha \approx 76.739°$.