Les équations du premier et du second degré à la règle et au compas

Marielle Cherpion

Juin 2012

Pour avancer dans le document,
cliquer sur la barre d'espacement.

Equation du premier degré

L'équation du premier degré

$$ax + b = 0$$

avec $a \neq 0$ peut se récrire

$$ax = -b.$$

Sa solution est donnée par $x = -\dfrac{b}{a}$.

Equation du second degré

L'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a \neq 0$ peut se récrire

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou encore

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Equation du second degré

En réduisant le membre de droite au même dénominateur, on obtient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

et donc

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Equation du second degré

En réduisant le membre de droite au même dénominateur, on obtient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

et donc

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

On en déduit

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cette expression a un sens dans $\mathbb{R}$ si $b^2 - 4ac \geq 0$.

Théorème de Thalès

Ce résultat traduit le fait que la projection d'une droite sur une autre, suivant une direction donnée, conserve les proportions.

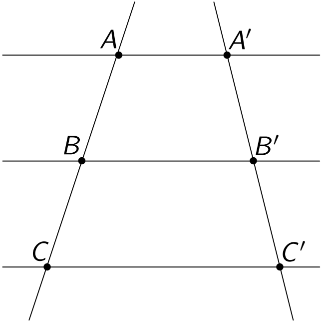
Théorème

Trois droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments homologues proportionnels.

Théorème de Thalès

Autrement dit, si trois droites parallèles rencontrent deux droites d et d', respectivement et dans cet ordre, en A, B, C et A', B', C', alors

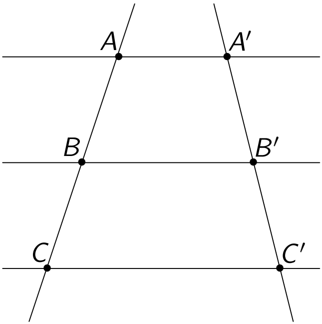
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}.$$



Théorème de Thalès

En permutant les termes moyens des fractions, on peut faire naître d'autres égalités de rapports :

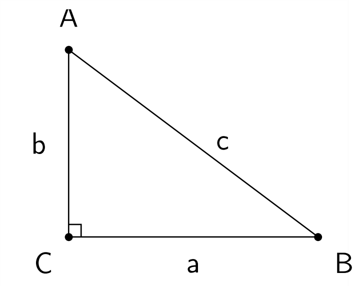
$$\frac{|A'B'|}{|B'C'|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \qquad \frac{|B'C'|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|AC|}, \qquad \frac{|A'B'|}{|A'C'|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$



Théorème de Pythagore

Théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés : $a^2 + b^2 = c^2$.



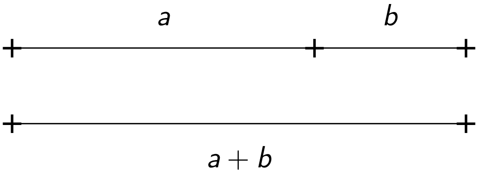
Ce résultat permet de calculer la longueur d'un des côtés d'un triangle rectangle si l'on connaît les deux autres.

Les quatre opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication et division) ainsi que la racine carrée peuvent être réalisées à la règle et au compas.

Addition de deux nombres

Soit a et b deux nombres réels positifs.

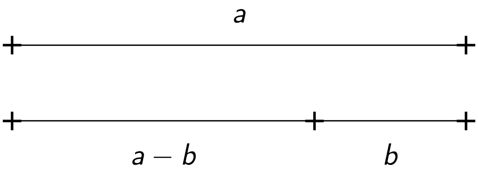
Pour additionner a et b, il suffit de mettre au bout du segment de longueur a le segment de longueur b :



Soustraction de deux nombres

Soit a et b deux nombres réels positifs.

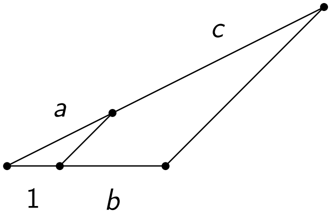
Pour soustraire a et b, il suffit de mettre au bout du segment de longueur a le segment de longueur b dans l'autre sens :



Multiplication de deux nombres

Soit a et b deux nombres réels positifs.

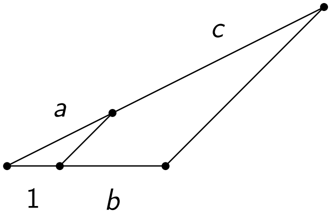
Pour multiplier a et b, on reporte des segments de longueur a et b ainsi que le segment unité sur deux droites sécantes comme indiqué sur la figure.



Multiplication de deux nombres

Soit a et b deux nombres réels positifs.

Pour multiplier a et b, on reporte des segments de longueur a et b ainsi que le segment unité sur deux droites sécantes comme indiqué sur la figure.

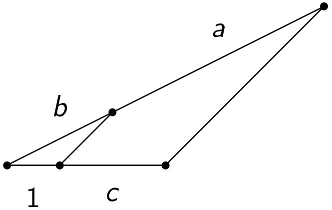


Par une application du Théorème de Thalès, on obtient $\dfrac{a}{1} = \dfrac{c}{b}$ et donc $c = a \cdot b$.

Division de deux nombres

Soit a et b deux nombres réels positifs avec $b \neq 0$.

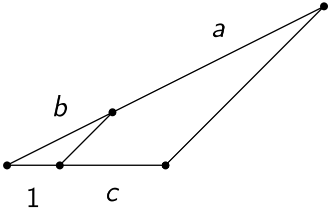
Pour diviser a par b, on reporte des segments de longueur a et b ainsi que le segment unité sur deux droites sécantes comme indiqué sur la figure.



Division de deux nombres

Soit a et b deux nombres réels positifs avec $b \neq 0$.

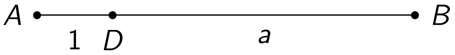
Pour diviser a par b, on reporte des segments de longueur a et b ainsi que le segment unité sur deux droites sécantes comme indiqué sur la figure.



Par une application du Théorème de Thalès, on obtient $\dfrac{b}{1} = \dfrac{a}{c}$ et donc $c = \dfrac{a}{b}$.

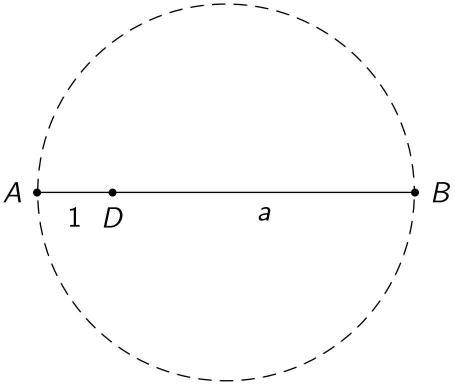
Racine carrée d'un nombre $a > 0$

On commence par construire le segment $1 + a$ en mettant bout à bout des segments de longueur 1 et a. Notons A et D les origine et extrémité du segment de longueur 1 et B l'extrémité du segment de longueur a.



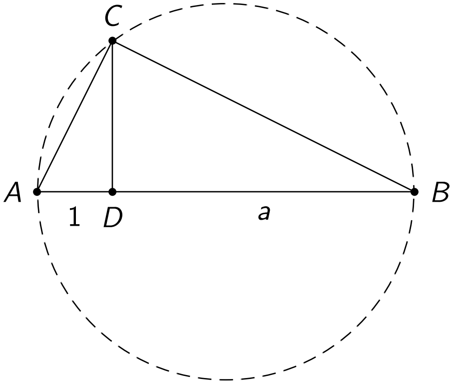
Racine carrée d'un nombre $a > 0$

On trace ensuite le cercle de diamètre $1 + a$.



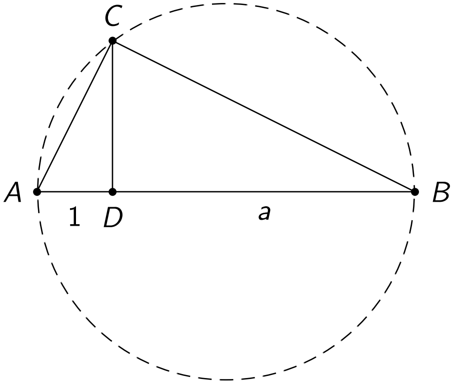
Racine carrée d'un nombre $a > 0$

Par le point D, on trace une perpendiculaire au segment $1 + a$. Cette perpendiculaire coupe le cerlce en un point C.



Racine carrée d'un nombre $a > 0$

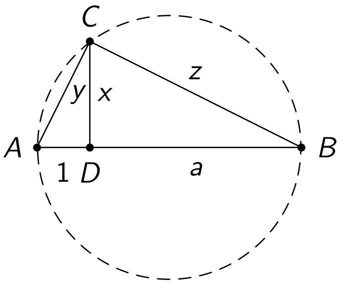
Par le point D, on trace une perpendiculaire au segment $1 + a$. Cette perpendiculaire coupe le cerlce en un point C.



Le triangle ABC ainsi obtenu est rectangle puisqu'il est inscrit dans un demi-cercle.

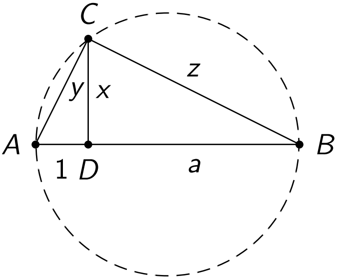
Racine carrée d'un nombre $a > 0$

Soit x la longueur du segment DC, y la longueur du segment AC et z la longueur du segment BC.



Racine carrée d'un nombre $a > 0$

Soit x la longueur du segment DC, y la longueur du segment AC et z la longueur du segment BC.



Des applications du Théorème de Pythagore dans les triangles rectangles ACD, DCB et ABC donnent

$$1^2 + x^2 = y^2, \qquad a^2 + x^2 = z^2, \qquad y^2 + z^2 = (1+a)^2.$$

Racine carrée d'un nombre $a > 0$

Des applications du Théorème de Pythagore dans les triangles rectangles ACD, DCB et ABC donnent

$$1^2 + x^2 = y^2, \qquad a^2 + x^2 = z^2, \qquad y^2 + z^2 = (1+a)^2.$$

Racine carrée d'un nombre $a > 0$

Des applications du Théorème de Pythagore dans les triangles rectangles ACD, DCB et ABC donnent

$$1^2 + x^2 = y^2, \qquad a^2 + x^2 = z^2, \qquad y^2 + z^2 = (1+a)^2.$$

En injectant les deux premières égalités dans la troisième, on obtient

$$1 + x^2 + a^2 + x^2 = (1+a)^2$$

et donc

$$1 + 2x^2 + a^2 = 1 + 2a + a^2.$$

Racine carrée d'un nombre $a > 0$

Des applications du Théorème de Pythagore dans les triangles rectangles ACD, DCB et ABC donnent

$$1^2 + x^2 = y^2, \qquad a^2 + x^2 = z^2, \qquad y^2 + z^2 = (1+a)^2.$$

En injectant les deux premières égalités dans la troisième, on obtient

$$1 + x^2 + a^2 + x^2 = (1+a)^2$$

et donc

$$1 + 2x^2 + a^2 = 1 + 2a + a^2.$$

Après simplification, on trouve

$$x^2 = a \qquad \text{et donc} \qquad x = \sqrt{a}.$$

Résolution des équations

Nous venons donc de prouver que les quatre opérations arithmétiques élémentaires ainsi que la racine carrée sont réalisables à la règle et au compas.

Résolution des équations

Nous venons donc de prouver que les quatre opérations arithmétiques élémentaires ainsi que la racine carrée sont réalisables à la règle et au compas.

Théorème

On peut résoudre des équations du premier et du second degré à l'aide de la règle et du compas.

Résolution des équations

Théorème

On peut résoudre des équations du premier et du second degré à l'aide de la règle et du compas.

Equation du premier degré : la solution de l'équation $ax + b = 0$ peut s'écrire $x = -\frac{b}{a}$.

Cette solution étant le quotient de deux nombres, elle peut se construire à la règle et au compas.

Résolution des équations

Théorème

On peut résoudre des équations du premier et du second degré à l'aide de la règle et du compas.

Equation du second degré : les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peuvent s'écrire

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

à condition que $b^2 - 4ac \geq 0$.

Ces solutions ne contenant que des opérations arithmétiques élémentaires et des racines carrées, peuvent se construire à la règle et au compas.

Résolution des équations

On peut également montrer la réciproque du théorème précédent.

Théorème

En traçant des droites et des cercles, on ne fait que construire des racines d'équations du premier ou du second degré.

Pour plus de détails, vous pouvez consulter le dossier disciplinaire thématique :

Les équations du premier et du second degré à la règle et au compas

sur le site e-mediasciences : www.uclouvain.be/e-mediasciences.html