

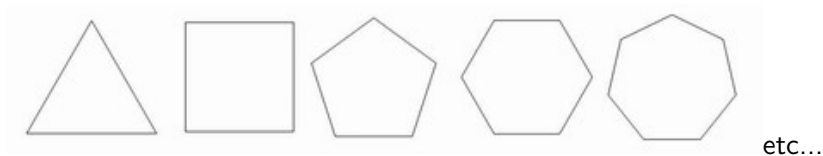
Les multiples facettes des polyèdres

Pascal Lambrechts (pascal.lambrechts@uclouvain.be)

Printemps des sciences
21 mars 2013

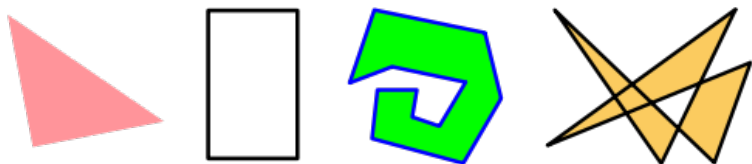
Les polygones

Les premiers polygones réguliers :



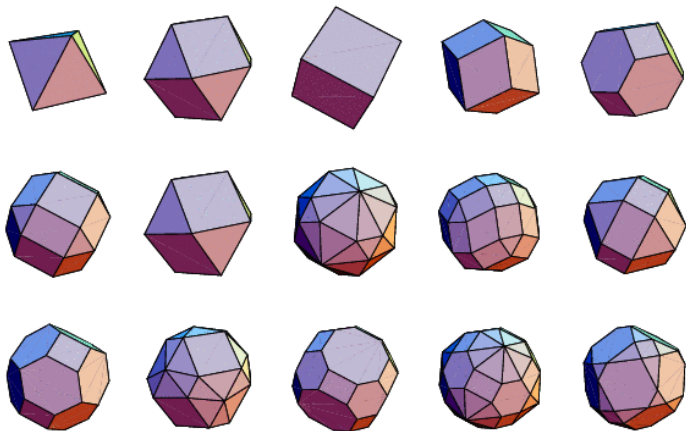
Pour chaque entier $n \geq 3$ il y a exactement un n -gone régulier convexe.

Il y a plein d'autres polygones, non réguliers :



Polyèdres abstraits

Un **polyèdre** est un solide bordé par des faces polygonales.



Patron et diagramme de Schlegel d'un polyèdre

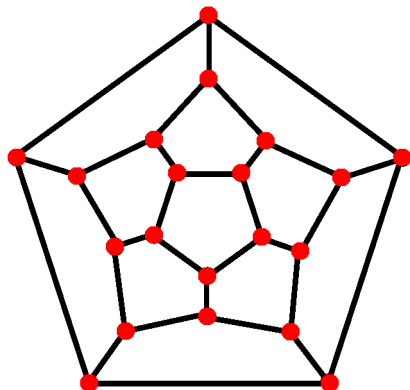
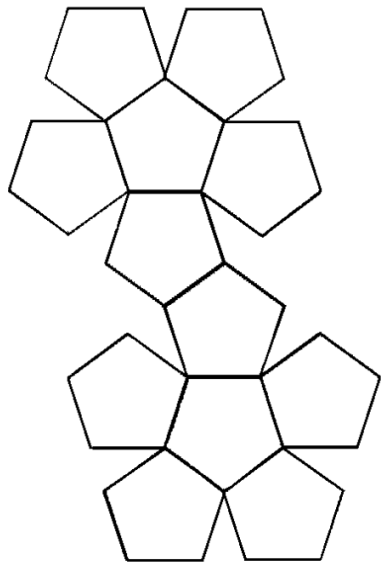


Diagramme de Schlegel du dodécaèdre.

Les polyèdres en architecture



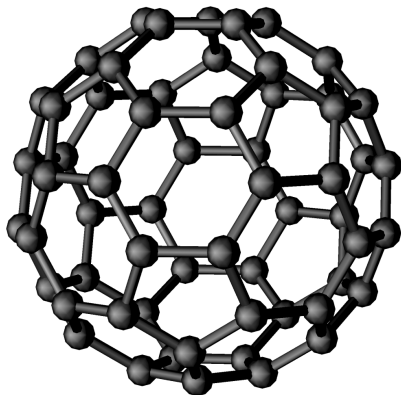
Les pyramides de Giza
(2500 Av JC)



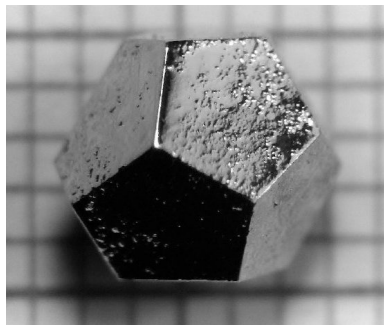
La biosphère de R. Fuller (1967)



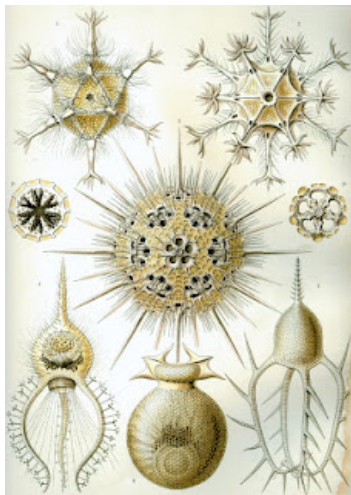
Cristaux de sel



Molécule de fullerène C_{60}
(prix Nobel chimie 1996)

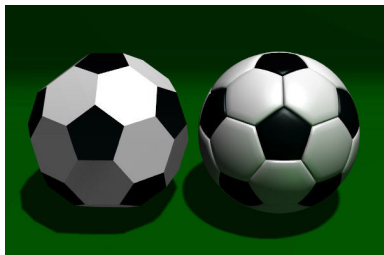


Quasi-cristal Ho-Mg-Zn
(prix Nobel de chimie 2011)



Quelques virus
(la grippe est un icosaèdre...)

Les polyèdres en sport et en haute couture



TRUNCATED



$$\chi = v - e + f = 2$$

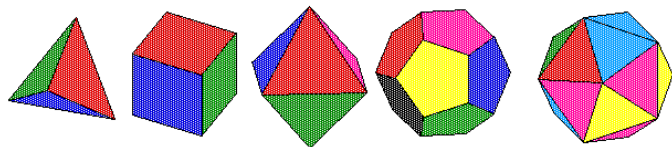
ICOSAHEDRON



Cube et dodécaèdre de chez Dior...

Les polyèdres réguliers (solides de Platon)

The five Platonic solids



The Tetrahedron

The Cube

The Octahedron

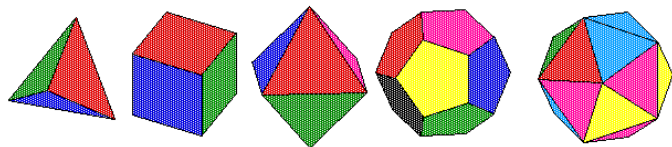
The Dodecahedron

The Icosahedron

Polyèdre	$p = \# \text{arêtes/faces}$	$q = \# \text{arêtes/sommets}$
tétraèdre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

Les polyèdres réguliers (solides de Platon)

The five Platonic solids



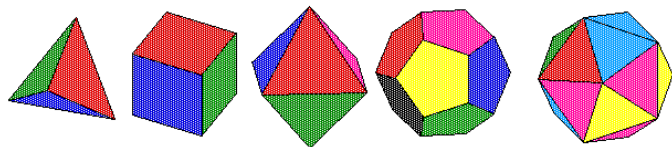
The Tetrahedron The Cube The Octahedron The Dodecahedron The Icosahedron

Polyèdre	$p = \# \text{arêtes/faces}$	$q = \# \text{arêtes/sommets}$
tétraèdre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

Pourquoi n'y a-t-il que CINQ polyèdres réguliers (convexes) ?

Les polyèdres réguliers (solides de Platon)

The five Platonic solids



The Tetrahedron The Cube The Octahedron The Dodecahedron The Icosahedron

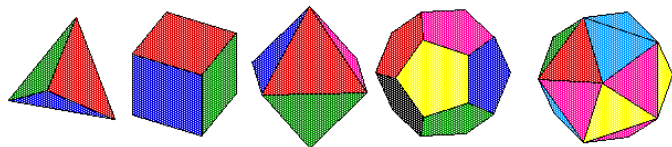
Polyèdre	$p = \# \text{arêtes/faces}$	$q = \# \text{arêtes/sommets}$
tétraèdre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

Pourquoi n'y a-t-il que CINQ polyèdres réguliers (convexes) ?

En chaque sommet se rencontrent q faces à p côtés : forte contrainte !

Les polyèdres réguliers (solides de Platon)

The five Platonic solids



The Tetrahedron The Cube The Octahedron The Dodecahedron The Icosahedron

Polyèdre	$p = \# \text{arêtes/faces}$	$q = \# \text{arêtes/sommets}$
tétraèdre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

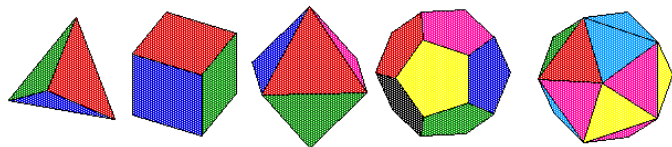
Pourquoi n'y a-t-il que CINQ polyèdres réguliers (convexes) ?

En chaque sommet se rencontrent q faces à p côtés : forte contrainte !

Pourquoi y en a-t-il quand même CINQ ?

Les polyèdres réguliers (solides de Platon)

The five Platonic solids



The Tetrahedron The Cube The Octahedron The Dodecahedron The Icosahedron

Polyèdre	$p = \# \text{arêtes/faces}$	$q = \# \text{arêtes/sommets}$
tétraèdre	3	3
cube	4	3
octaèdre	3	4
dodécaèdre	5	3
icosaèdre	3	5

Pourquoi n'y a-t-il que CINQ polyèdres réguliers (convexes) ?

En chaque sommet se rencontrent q faces à p côtés : forte contrainte !

Pourquoi y en a-t-il quand même CINQ ?

Un miracle de la nature (ou des mathématiques)!

La physique de Platon (350 Av. JC)

Quatre éléments fondamentaux constituent toute chose :

la TERRE \leftrightarrow l'AIR le FEU \leftrightarrow l'EAU.

Ces 4 éléments correspondent au cube, octaèdre, tétraèdre et icosaèdre.

La physique de Platon (350 Av. JC)

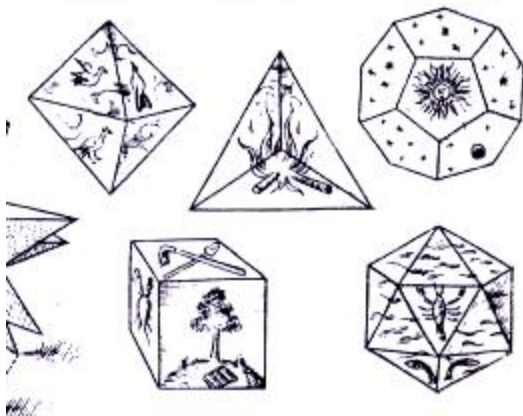
Quatre éléments fondamentaux constituent toute chose :

la TERRE ↔ l'AIR

le FEU ↔ l'EAU.

Ces 4 éléments correspondent au cube, octaèdre, tétraèdre et icosaèdre.

L'UNIVERS correspond au dodécaèdre (12 faces = 12 signes du Zodiaque)



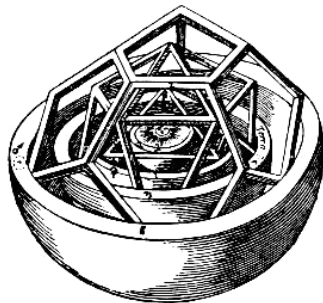
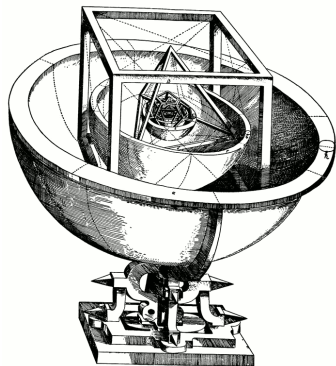
La cosmologie de Kepler (1571-1630)

Johannes Kepler a découvert que les planètes gravitent autour du soleil le long d'ellipses en suivant des lois précises.

Avant cela il formule une autre hypothèse dans

Mysterium Cosmographicum :

les six planètes se déplacent sur des sphères inscrites dans les cinq polyèdres de Platon emboîtés :



La formule d'Euler pour les polyèdres.

$$S - A + F = 2.$$

La formule d'Euler : $S - A + F = 2$

Notons : $S :=$ nbr de sommets, $A :=$ nbr d'arêtes, $F :=$ nbr de faces.

Polyèdre	F	A	S	
tétraèdre	4	6	4	
cube	6	12	8	
octaèdre	8	12	6	
dodécaèdre	12	30	20	
icosaèdre	20	30	12	
pyramide carrée	5	8	5	
icosaèdre tronqué	32	90	60	

La formule d'Euler : $S - A + F = 2$

Notons : $S :=$ nbr de sommets, $A :=$ nbr d'arêtes, $F :=$ nbr de faces.

Polyèdre	F	A	S	$\chi := F - A + S$
tétraèdre	4	6	4	2
cube	6	12	8	2
octaèdre	8	12	6	2
dodécaèdre	12	30	20	2
icosaèdre	20	30	12	2
pyramide carrée	5	8	5	2
icosaèdre tronqué	32	90	60	2

Formule d'Euler (env. 1750)

Pour tout polyèdre ayant la "forme" d'une sphère :

$$S - A + F = 2.$$

Quelques exercices pour les amateurs de maths

Exercice

Démontrer la formule d'Euler $S - A + F = 2$.

Indication : que se passe-t-il si on ajoute/enlève un sommet (ou une arête) ?

Exercice

Utiliser la formule d'Euler pour montrer qu'il n'y a que 5 polyèdres réguliers.

Indication : Exprimer S et F à partir de p et q et de A . En déduire des contraintes sur p et q .

Exercice

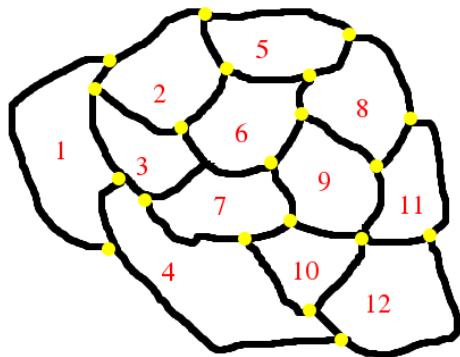
Pour un polyèdre à faces pentagonales et hexagonales où trois faces se rencontrent en chaque sommet, déterminer le nombre de faces pentagonales et hexagonales.

Un exemple est l'icosaèdre tronqué (ballon de foot). Y en a-t-il d'autres ?

La formule d'Euler d'un graphe dans le plan

Dessignons dans le plan un graphe constitué de S sommets et de A arêtes. Le graphe découpe le plan en R région (y compris une grande région extérieure non bornée). Alors

$$S - A + R = 2.$$



$$\begin{aligned} R &= 13 \\ S &= 20 \\ A &= 31 \\ S - A + R &= 2 \end{aligned}$$

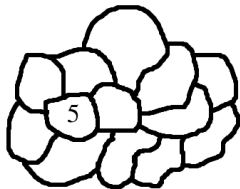
Conséquence de la formule d'Euler sur les cartes géographiques

Dessignons une carte géographique.

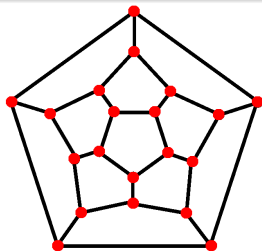
Les points à l'intersection de ≥ 3 frontières sont des *sommets* d'un graphe et les morceaux de frontière entre deux sommets sont les *arêtes*. Les régions délimitées sont les pays.

Exercice

Montrer qu'il y existe toujours un pays ayant au plus 5 voisins.



Choix d'un pays à ≤ 5 voisins

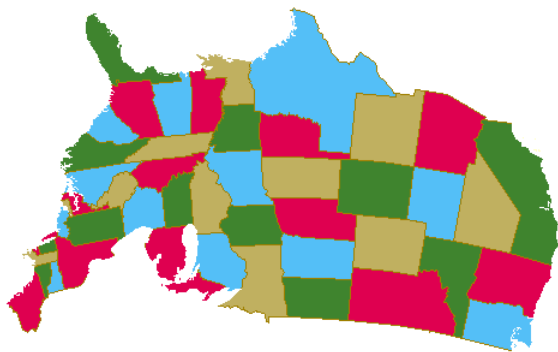


Dans la carte "dodécaédrique", tout pays a 5 voisins.

Coloriage de cartes de géographie politique

Le théorème des 4 couleurs (prouvé en 1976.)

Toute carte géographique peut être coloriée avec au plus 4 couleurs de sorte que deux pays voisins soient toujours de couleurs distinctes.

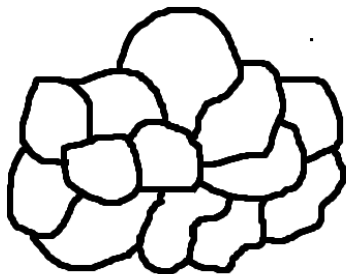


La preuve est très longue et nécessite une longue vérification par ordinateur.

Preuve du théorème des 6 couleurs

Nous allons démontrer le théorème des 6 couleurs. La preuve se fait *par récurrence* sur le nombre n de pays.

C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons-le pour $n + 1$ pays.

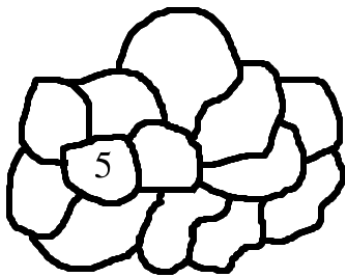


Une carte de 13 pays à colorier

Preuve du théorème des 6 couleurs

Nous allons démontrer le théorème des 6 couleurs. La preuve se fait *par récurrence* sur le nombre n de pays.

C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons-le pour $n + 1$ pays.

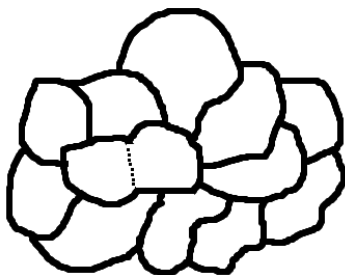


Choix d'un pays à ≤ 5 voisins

Preuve du théorème des 6 couleurs

Nous allons démontrer le théorème des 6 couleurs. La preuve se fait *par récurrence* sur le nombre n de pays.

C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons-le pour $n + 1$ pays.

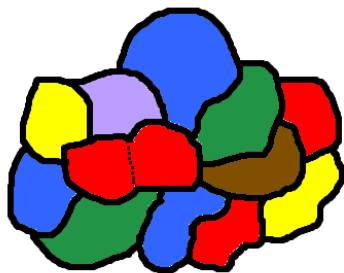


Annexion du pays par un voisin

Preuve du théorème des 6 couleurs

Nous allons démontrer le théorème des 6 couleurs. La preuve se fait *par récurrence* sur le nombre n de pays.

C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons-le pour $n + 1$ pays.

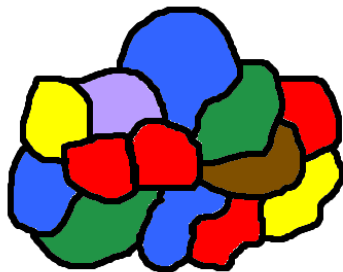


Coloriage de la carte après annexion

Preuve du théorème des 6 couleurs

Nous allons démontrer le théorème des 6 couleurs. La preuve se fait *par récurrence* sur le nombre n de pays.

C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons-le pour $n + 1$ pays.

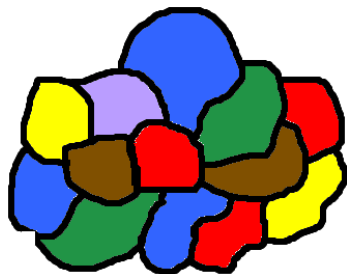


Reprise d'indépendance du pays

Preuve du théorème des 6 couleurs

Nous allons démontrer le théorème des 6 couleurs. La preuve se fait *par récurrence* sur le nombre n de pays.

C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons-le pour $n + 1$ pays.



Coloriage dans une couleur libre

Preuve du théorème des 6 couleurs

Nous allons démontrer le théorème des 6 couleurs. La preuve se fait *par récurrence* sur le nombre n de pays.

C'est vrai si $n \leq 6$. Supposons que le théorème est vrai pour n pays (disons $n = 12$) et démontrons-le pour $n + 1$ pays.

Exercice

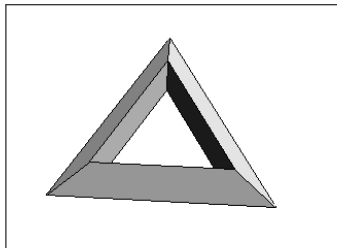
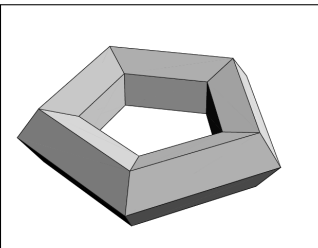
Adapter l'argument pour démontrer le théorème des 5 couleurs.

Carte géographique sur le tore

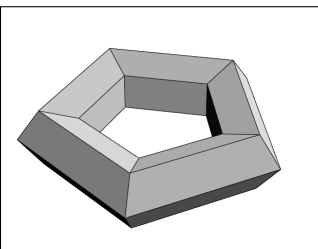
Pour colorier une carte dessinée sur un tore il faut 7 couleurs !



Le tore comme polyèdre

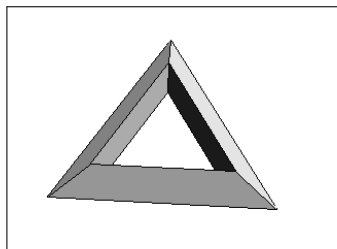


Le tore comme polyèdre



- $S = 5 \times 5 = 25$
- $A = 5 \times 5 \times 2 = 50$
- $F = 5 \times 5 = 25$

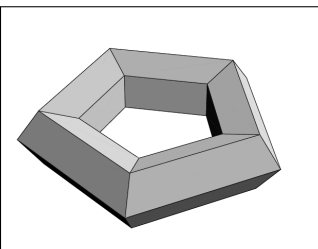
Donc : $\chi = S - A + F = 0$



- $S = 3 \times 3 = 9$
- $A = 3 \times 3 \times 2 = 18$
- $F = 3 \times 3 = 9$

Donc : $\chi = S - A + F = 0$

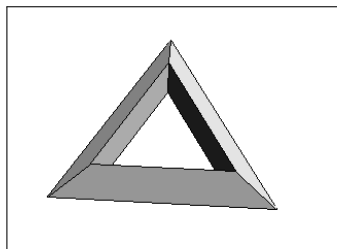
Le tore comme polyèdre



- $S = 5 \times 5 = 25$
- $A = 5 \times 5 \times 2 = 50$
- $F = 5 \times 5 = 25$

Donc : $\chi = S - A + F = 0$

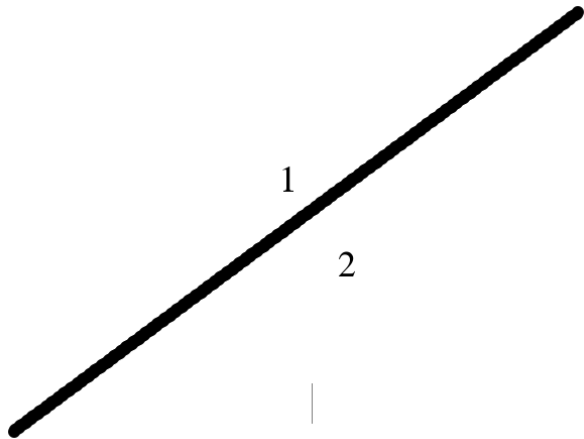
fbx La caractéristique d'Euler d'un polyèdre dépend de sa "forme" !!!



- $S = 3 \times 3 = 9$
- $A = 3 \times 3 \times 2 = 18$
- $F = 3 \times 3 = 9$

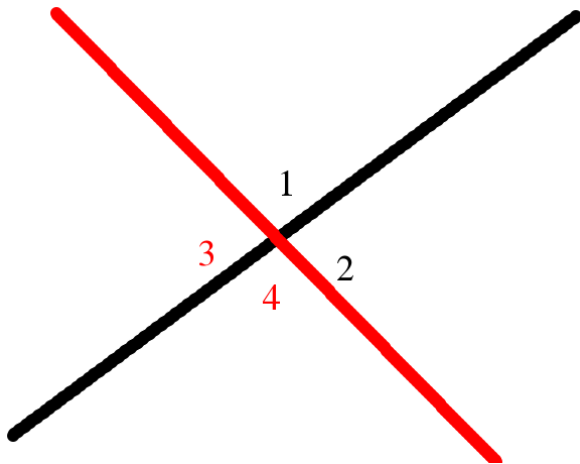
Donc : $\chi = S - A + F = 0$

Découpage du plan par des droites



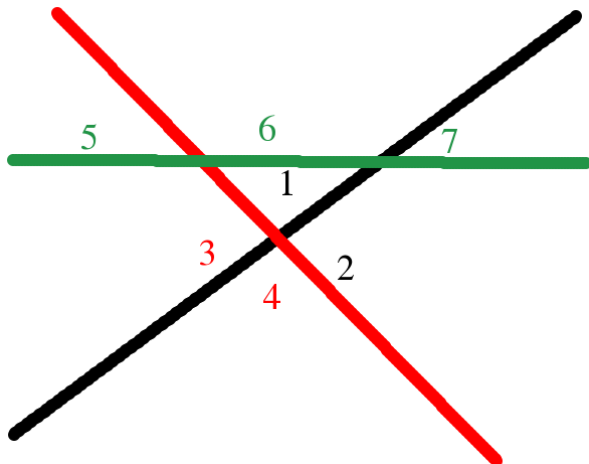
# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2				.

Découpage du plan par des droites



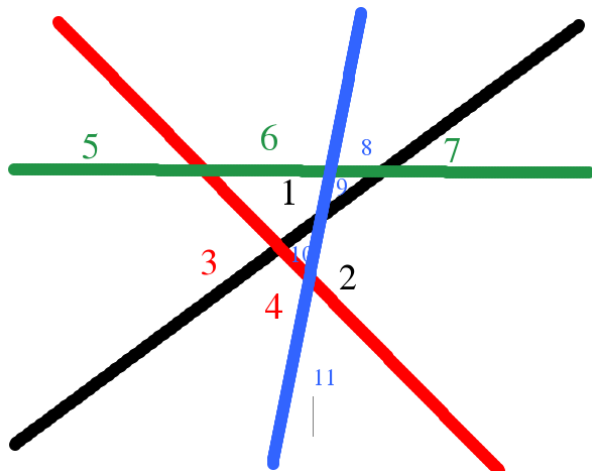
# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2	4			.

Découpage du plan par des droites



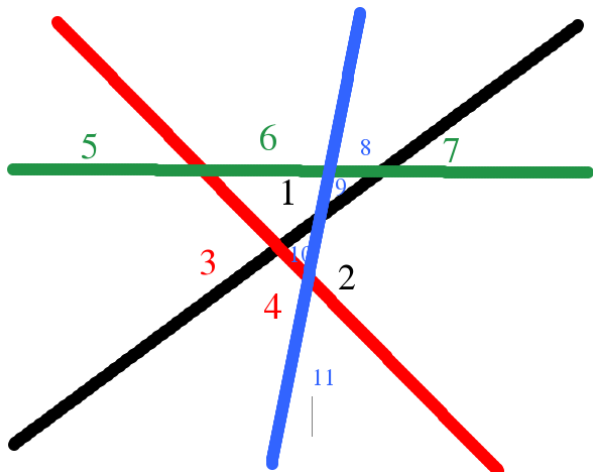
# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2	4	7		.

Découpage du plan par des droites



# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2	4	7	11	.

Découpage du plan par des droites



# droites	1	2	3	4	5,6,...
# régions	2	4	7	11	exercice !.

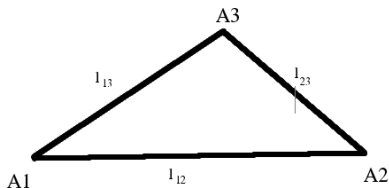
Indication : utiliser la formule d'Euler !

Hypothèse : pas trois droites concourantes ; pas deux droites parallèles.

Rigidité des polyèdres.

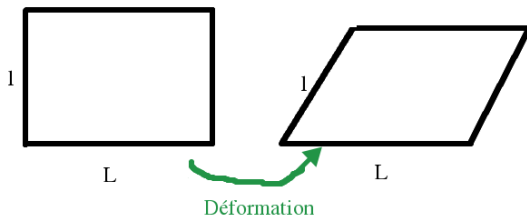
Les triangles sont rigides

Un triangle est rigide : si ses côtés sont des barres rigides de longueurs fixées, alors il est impossible de déformer le triangle.



En fait si on fixe les trois longueurs $l_{12} = \overline{A_1A_2}$, $l_{13} = \overline{A_1A_3}$ et $l_{23} = \overline{A_2A_3}$, il n'y a qu'un seul triangle possible.

Par contre un quadrilatère n'est pas rigide :



Les croisillons et la rigidité des triangles



Rigidifier une étagère ou un échafaudage



Les polyèdres sont-ils rigides ?

Euler :

Une figure solide fermée ne peut être déformée, à moins d'être déchirée.

Les polyèdres sont-ils rigides ?

Euler :

Une figure solide fermée ne peut être déformée, à moins d'être déchirée.

Théorème de rigidité de Cauchy (1813)

Les polyèdres **convexes** sont rigides si les faces sont rigides.

Corollaire

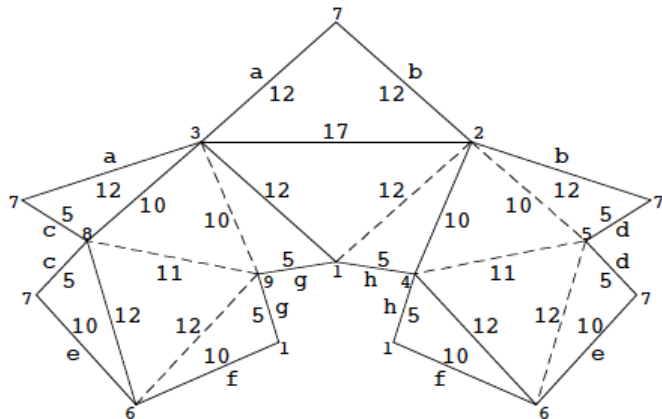
Les polyèdres **convexes** à faces triangulaires sont rigides.


R. Bricard (mathématicien français, 1896) construit un exemple d'octaèdre déformable (mais cet octaèdre s'autointersecte)

Le flexoèdre de Connelly

Connelly, 1976

Il existe un polyèdre à faces triangulaires et non rigide.



Les longueurs des arêtes ne changent pas quand on déforme le flexoèdre ! 

Le polyèdre de Connelly original était beaucoup plus compliqué.
Il a été simplifié par Pierre Deligne : mathématicien belge, prix Abel 2013
(équivalent du prix Nobel des mathématiques.)



La conjecture du soufflet

Question

Est-ce que le volume d'un flexoèdre peut changer pendant la déformation ?

Peut-on exprimer le volume intérieur du polyèdre comme une fonction des longueurs des arêtes ?

Formule de Heron pour l'aire d'un triangle

$$\text{aire}(\Delta A_1 A_2 A_3) = \sqrt{S(S - l_{12})(S - l_{13})(S - l_{23})}$$

avec

$$S = \frac{l_{12} + l_{13} + l_{23}}{2}.$$

Par contre il ne peut pas y avoir de formule à la Héron pour un quadrilatère !

Formule de Piero de la Francesca pour le volume d'un tétraèdre



Piero della Francesca (env. 1450)

Les six longueurs des arêtes d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ déterminent son volume par une formule explicite.

$$\text{volume}(A_1A_2A_3A_4) = \sqrt{\frac{1}{288} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 \\ 1 & l_{21}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 \\ 1 & l_{31}^2 & l_{32}^2 & 0 & l_{34}^2 \\ 1 & l_{41}^2 & l_{42}^2 & l_{43}^2 & 0 \end{pmatrix}}$$

où $l_{ij} = \overline{A_iA_j}$.

Formule de Sabitov pour le volume d'un polyèdre

Théorème de Sabitov (1995)

Il existe un polynôme

$$f(x) = a_N \cdot x^N + a_{N-1} \cdot x^{N-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

tel que

- les coefficients a_N, \dots, a_1, a_0 sont des fonctions des longueurs des arêtes l_{ij} du polyèdre
- le volume du polyèdre est une racine de ce polynôme :

$$f(\text{volume}) = 0.$$

Corollaire

Le volume d'un flexoèdre est inchangé pendant toute la déformation.

Quelle est la forme de l'univers ?

Quelle est la forme de l'univers ?

Quelle "forme" a l'univers dans lequel nous vivons ?

Par exemple : quelle est la "forme" de la terre sur laquelle nous vivons

- La terre est *localement plane* mais ce n'est pas un plan infini.
- La terre n'a pas de bord : ce n'est pas un disque plat.
- La terre est une sphère : une surface finie qui n'a pas de bord.
- Il n'y a pas de raison a priori pour que l'univers soit l'analogue à trois dimensions de ce qu'un plan infini est à deux dimensions.
L'univers pourrait être fini sans bord.



Hypothèse dodécaédrique (Luminet, Weeks et al. ; Nature 2003)

L'univers a peut être la forme d'un espace obtenu à partir d'un dodécaèdre solide en identifiant ses faces opposées.

Cette hypothèse peut être vérifiée par des données expérimentales accessibles.

Hypothèse dodécaédrique (Luminet, Weeks et al. ; Nature 2003)

L'univers a peut être la forme d'un espace obtenu à partir d'un dodécaèdre solide en identifiant ses faces opposées.

Cette hypothèse peut être vérifiée par des données expérimentales accessibles.

Malheureusement, il semble que les données expérimentales plus récentes (2008) ont contredit l'hypothèse dodécaédrique. Platon ne tient pas encore sa revanche....

Données expérimentales pour tester l'hypothèse de l'univers docécaédrique ?

L'enfance de l'Univers dévoilée

LE MONDE | 21.03.2013 à 11h27 • Mis à jour le 21.03.2013 à 13h44

Par David Larousserie

Abonnez-vous
à partir de 1 €



Réagir



Classer



Imprimer



Envoyer

Partager



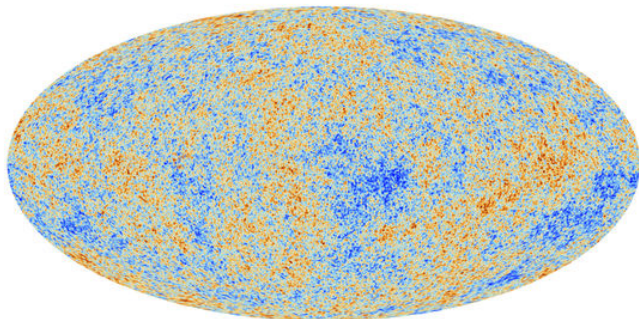
Recommander



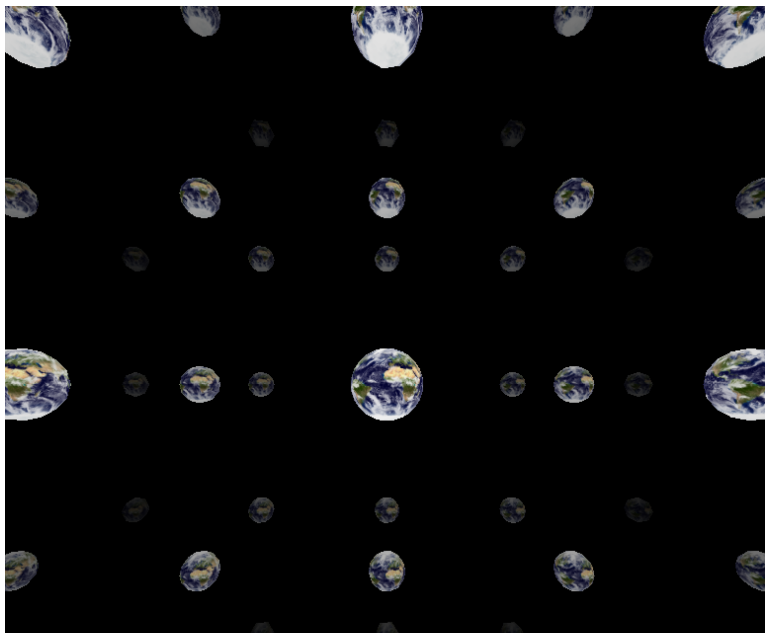
Envoyer



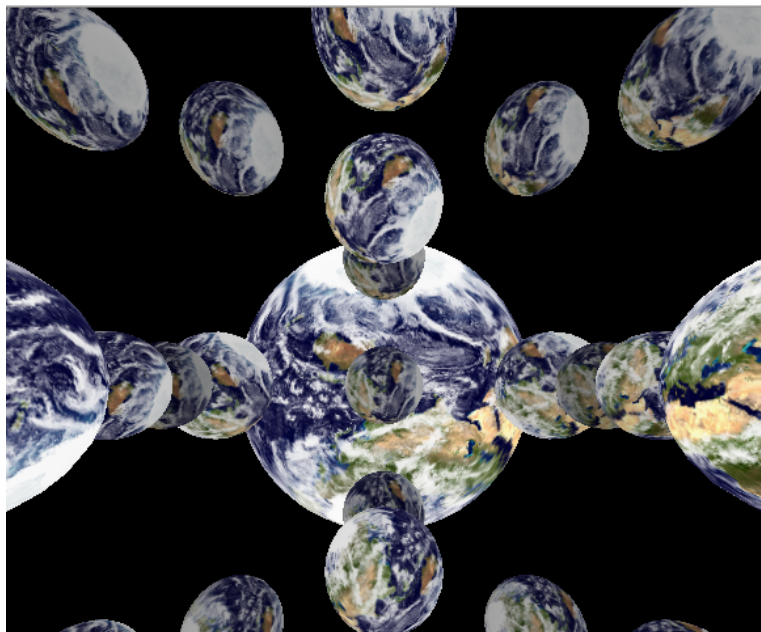
960 personnes le recommandent. Inscription
pour voir ce que vos amis recommandent.



A quoi ressemblerait un univers torique ?



A quoi ressemblerait un univers dodécaédrique ?



that's all...

Merci de votre attention.
Bon printemps...

Les transparents de cette conférence seront publiés sur :

<http://www.uclouvain.be/scienceinfuse>
pascal.lambrechts@uclouvain.be